数学小丛书 14

单位分数

柯召　孙琦

科学出版社

2002

内 容 简 介

单位分数是分子为1、分母为自然数的分数.用单位分数表示分数,具有许多有趣的性质,由此产生一些有趣的问题,其中有的是至今尚未解决的数论问题和猜想.本书从有关单位分数的一个古老的问题谈起,讨论了单位分数的一些重要的性质和应用,最后介绍了一种有趣的无穷级数及其求和的方法.

图书在版编目(CIP)数据

单位分数/柯召,孙琦. —北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.单… Ⅱ.①柯…②孙… Ⅲ.分数-普及读物
Ⅳ.O121.1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010120号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年5月第 一 版 开本:787×960 1/32
2002年5月第一次印刷 印张:2 3/8 插页:1
印数:1—5 000 字数:32 000

全套书定价:99.00元(共18册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

前　　言

1964 年，北京数学会约我们写一本小册子，作为中学生课外阅读的《数学小丛书》中的一本，为此，我们编写了《单位分数》一书. 后来，这套小丛书停出了，这本小册子也就未能出版. 由于原稿失落，现在这本小册子是重写的.

本书的内容，仅仅用到初等数论中整除、同余式、算术基本定理等简单概念和结果. 中学生阅读时，不会有多少困难. 实际上，书中绝大多数内容可以说是属于算术的范围，我们认为，这是些较为有趣的问题，对于扩大读者的数学知识，以及提高解决问题的技巧和能力，都会有一定的好处.

如有不妥之处，请读者批评指正！

作　者

1980 年 3 月于成都

目　录

1 什么是单位分数

我们把分子是 1、分母是自然数的分数叫做**单位分数**，记成$\frac{1}{n}$.

人类对分数的认识就是从单位分数开始的.大约在公元前 2000 年，古代埃及人就是把分子大于 1 的正分数表示成单位分数的和，例如$\frac{5}{6}$写成了$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$的形式.所谓林特(Rhind)① 抄本，就记载了当时埃及人把一些分数写成单位分数的和，其中包括所有$\frac{2}{b}$(b 取 5 到 101 之间的所有奇数)被表示成不同的单位分数和的表，每一个和中的单位分数都按它们的大小递减排列.

用单位分数表示分数，有许多有趣的性质，

① Rhind 是 19 世纪苏格兰的一位古物收集家，1855 年，他买到了这种抄本，后来，人们就叫林特抄本.

由此产生出一些有趣的问题.

尽管单位分数的概念以及把分数表示成不同的单位分数之和的问题,在古代已经提出了,但是直到今天,有关单位分数的问题,仍然引起人们的兴趣,因为它所产生的问题,有的已成为至今尚未解决的一些数论问题和猜想.这些问题和猜想,看来并不简单,它们难住了当代许多数学家.

2 一个古老的传说

流传着一个阿拉伯古老的传说：

一个老人有 11 匹马，他打算把$\frac{1}{2}$分给大儿子，$\frac{1}{4}$分给二儿子，$\frac{1}{6}$分给小儿子，应该怎样分呢？

11 是一个素数，它不能被 2、4 或 6 整除，总不能把一匹马切开来分吧！一个聪明人提出这样的解决办法，“借用”一匹马，共有 12 匹，而 12 能被 2、4 或 6 整除，于是大儿子分得 6 匹，二儿子分得 3 匹，小儿子分得 2 匹，而 $6+3+2=11$，“借到”的一匹马即可“还去”，问题得到解决. 当然，这只是一个数学游戏，不能从严格的数学意义去理解它.

我们可以把它理解为一个带有条件的把分数表示成为不同的单位分数和的问题，解决办法可从下面的关系式得出：

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6},\quad 2\mid 12,\ 4\mid 12,\ 6\mid 12,$$

这里,记号 $b\mid a$ 表示整数 $b\neq 0$ 整除整数 a.

现在,我们把这个传说略为改动一下:

一个老人有若干匹马,记为 n,他把马分给三个儿子,大儿子得 x 匹,二儿子得 y 匹,小儿子得 z 匹,并且满足 $x\mid n+1$, $y\mid n+1$, $z\mid n+1$, $x>y>z$,问老人的马的匹数,即 n,有多少种可能?

这容易化成一个单位分数的问题,设

$$n+1=xa,\ n+1=yb,\ n+1=zc,$$

这里 a, b, c 表示整数(本书常用字母 $a,b,c,\cdots$,表示整数).故由 $x+y+z=n$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{n}{n+1},\ a\mid n+1,\ b\mid n+1,$$

$$c\mid n+1,\ a<b<c. \tag{1}$$

现在,就来给出(1)式中的 n 能够取多少个自然数值.

很明显,因为$\frac{n}{n+1}<1$,故 $a\geqslant 2$.我们来证明不可能有 $a>2$.在证明之前,先介绍初等数论中一个重要定理,即算术基本定理:

证正整数 $n>1$,如果不计素因数的次序,则只有一种方法把 n 分解成素因数的连乘积.

由此定理可知，如果 $n>1$，把 n 的相同的素因数合并成幂数形状，则 n 只能分解成一种形式：

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}, \quad s \geqslant 1,$$

这里 $p_1, \cdots, p_s$ 是不同的素数，$p_1 < \cdots < p_s$，$a_1, \cdots, a_s$ 都是正整数，我们把 $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ 叫作 n 的标准分解式. 例如 1650 的标准分解式为

$$1650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 11.$$

如果(1)式中 $a>2$，设 $M=abc$，分三种情形来讨论：

1）如果 $M = P_1^{a_1} \cdots P_s^{a_s}$ 是 M 的标准分解式，$p_1, \cdots, p_s$ 是奇素数，当 $s \geqslant 2$ 时，则由 $p_1 p_2 \mid M = abc$，$a \mid n+1$，$b \mid n+1$，$c \mid n+1$，总有 $p_1 p_2 \mid n+1$，而 $p_1 \geqslant 3$，$p_2 \geqslant 5$，故 $n+1 \geqslant p_1 p_2 \geqslant 15$；当 $s=1$ 时，可设 $a = p_1^{e_1}$，$b = p_1^{e_2}$，$c = p_1^{e_3}$，由 $2<a<b<c$，故 $e_3>e_2>e_1 \geqslant 1$ 是正整数，$e_3 \geqslant 3$，故 $p_1^3 \mid c$，而 $c \mid n+1$，于是 $n+1 \geqslant p_1^3 \geqslant 27$.

2）如果 $M=2^{\alpha}$，类似 1）中 $s=1$ 的讨论知 $2^4 \mid c$，故有 $n+1 \geqslant 16$.

3）如果 $M = 2^{\alpha} p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ 是 M 的标准分解式，当 $s \geqslant 2$ 时，则由 $2p_1 p_2 \mid M = abc$，$a \mid n+1$，$b \mid n+1$，$c \mid n+1$，总有 $2p_1 p_2 \mid n+1$，而

$2p_1p_2 \geqslant 2\times3\times5=30$，于是 $n+1\geqslant 2p_1p_2\geqslant 30$；当 $s=1$ 时，由 $2<a<b<c$，$a\mid n+1$，$b\mid n+1$，$c\mid n+1$，总有 $2p_1^2\mid n+1$ 或 $2^2p_1\mid n+1$，故有 $n+1\geqslant 12$.

总之，归纳以上三种情形，我们得出 $n+1\geqslant 12$，由(1)式得

$$\frac{11}{12}\leqslant 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60},$$

这是矛盾的.

因此，$a=2$，代入(1)式得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1},$$

$$b\mid n+1,\quad c\mid n+1,\quad 2<b<c. \qquad (2)$$

如果 $b\geqslant 5$，当 $n+1\geqslant 8$ 时，由(2)式得

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30},$$

这是矛盾的. 故 $n+1<8$，由此和 $5\leqslant b<c\mid n+1$，得出

$$8 > n+1 \geqslant c \geqslant b+1 \geqslant 6,$$

故有 $n+1=6$，$b=5$，但 $5 \nmid n+1=6$(符号 $\nmid$ 表示不整除)或 $n+1=7$，$b=5$ 或 $n+1=7$，$b=6$,都与 $b \mid n+1$ 矛盾.故有 $b=3$ 或 $b=4$.

当 $b=3$ 时,由(2)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1},\ c \mid n+1,\ c>3. \quad (3)$$

再由(3)式可得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{6}-\frac{1}{c}$$

和

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{c}=\frac{1}{n+1}>0,$$

故

$$7 \leqslant c \leqslant 12.$$

$c=7$,代入(3)式得出

$$n=41,\ a=2,\ b=3,\ c=7;$$

$c=8$，代入(3)式得出

$$n=23,\ a=2,\ b=3,\ c=8;$$

$c=9$,代入(3)式得

$$n=17,\ a=2,\ b=3,\ c=9;$$

$c=10, 11$，无满足条件的解；

$c=12$，代入(3)式得出

$$n=11,\ a=2,\ b=3,\ c=12.$$

当 $b=4$ 时，由(2)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1},\ c<n+1,\ c>4; \quad (4)$$

再由(4)式得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{c};$$

故

$$5\leqslant c\leqslant 8.$$

$c=5$，代入(4)式得

$$n=19,\ a=2,\ b=4,\ c=5;$$

$c=6$，代入(4)式得

$$n=11,\ a=2,\ b=4,\ c=6;$$

$c=7$，无解；

$c=8$，代入(4)式得

$$n=7,\ a=2,\ b=4,\ c=8.$$

总起来，我们证明了这个问题中马的匹数共有六种可能，而分法共有七种：

	n	a	b	c
1	7	2	4	8
2	11	2	4	6
3	11	2	3	12
4	17	2	3	9
5	19	2	4	5
6	23	2	3	8
7	41	2	3	7

3 镶地板和铺路

大家一定看见过有些建筑物的地板是用各种正多边形的砖板镶成的，有的城市的街道是用各种正多边形的石板铺成的，……

用这些正多边形的建筑材料来铺满地面，可以有哪些形式呢？这个问题和单位分数有关.

下面，我们把这些建筑材料统称为砖.如果要求把这些正多边形的砖铺满地面，就必须使拼凑在每一顶点处的几块砖的各角和为 2π.

众所周知，一个正 $n(n\geqslant3)$ 边形各内角的和是 $(n-2)\pi$，所以每一个内角为

$$\alpha_n=\frac{n-2}{n}\pi,$$

这里 $\alpha_n<\pi$.

设在某一点有 k 块砖拼凑在一起，它们的边数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，则有

$$\alpha_{x_1} + \cdots + \alpha_{x_k} = 2\pi,$$

即得

$$\frac{x_1 - 2}{x_1}\pi + \cdots + \frac{x_k - 2}{x_k}\pi = 2\pi,$$

故有

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k} = \frac{k-2}{2}, \ x_j \geqslant 3 \ (j = 1, \cdots, k). \tag{1}$$

由(1)式可得 $k \geqslant 3$,以及

$$\frac{k-2}{2} = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3} = \frac{k}{3},$$

故有

$$k \leqslant 6.$$

这就证明了铺地时,在每一顶点周围砖的块数至少三块,最多六块.

现在就来分别讨论.

$k=3$ 的情形:

由(1)式得

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}, \ x_j \geqslant 3 \ (j = 1, 2, 3). \tag{2}$$

设(2)式的一组解为(x_1, x_2, x_3)，首先来求出(2)式的全部整数解.

1. 设 $x_1 = x_2 = x_3$，由(2)式得解

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (6,\ 6,\ 6).$$

这组解给出的正多边形可以铺满地面，拼法如图 1.

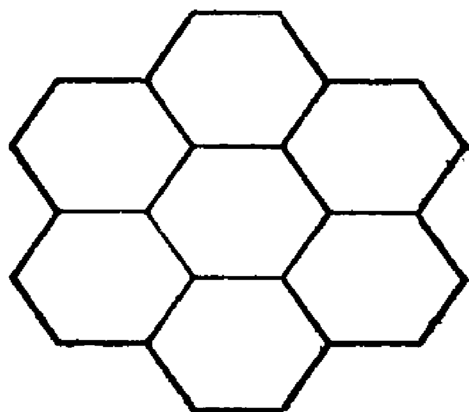


图 1

2. 设 x_1, x_2, x_3 中恰有两个相等，不失一般性，可设 $x_1 = x_2 \neq x_3$，(2)式化为

$$\frac{2}{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_3},$$

即

$$x_3 = 2 + \frac{8}{x_1 - 4},$$

故得 $x_1 - 4 = \pm 1$，$x_1 - 4 = \pm 2$，$x_1 - 4 = \pm 4$，

$x_1-4=\pm 8$，易知 $x_1-4=-1,\ -2,\ -4,\ -8$ 时，都不是(2)式的解．而 $x_1-4=2$ 时，$x_1=x_2=x_3=6$，由此仅得出

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$=(5,\ 5,\ 10),(8,\ 8,\ 4),(12,\ 12,\ 3).$$

于是 x_1,x_2,x_3 中恰有两个相等时，(2)式的全部解为

$$(5,5,10),\quad (5,10,5),\quad (10,5,5),$$
$$(8,8,4),\quad (8,4,8),\quad (4,8,8),$$
$$(12,12,3),\quad (12,3,12),\quad (3,12,12).$$

请读者注意，并非(2)式的每一组解给出的正多边形都能铺满地面，例如解(5，5，10)就不能铺满地面．这是因为，对于一个固定的正五边形，它的每一个顶点是由它本身和另一个正五边形、以及正十边形拼成，因此围绕此固定的正五边形的正五边形和正十边形分别没有两个相连，故知这些正五边形的总数和正十边形的总数是相等的，然而被包围的固定正五边形的边数是奇数，这是矛盾的．

而对于解(8，8，4)，(8，4，8)，(4，8，8)和解(12，12，3)，(12，3，12)，(3，12，12)给出的正多边形分别能铺满地面．拼法如图 2 和图 3．

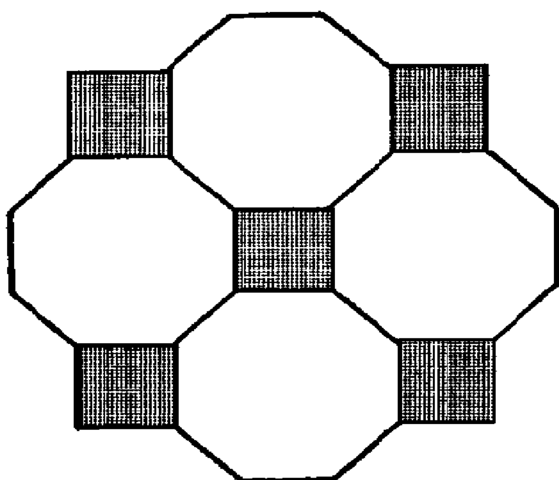


图 2

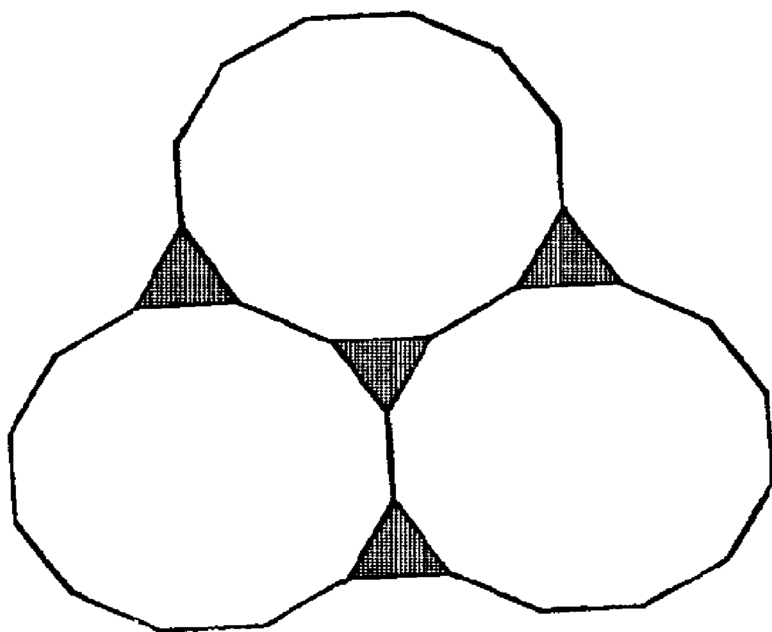


图 3

3. 设 x_1, x_2, x_3 两两不相等,不失一般性,可设 $x_1 < x_2 < x_3$. 由(2)式可得

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{3}{x_1},$$

即得

$$x_1 \leqslant 5.$$

类似前面对于解(5,5,10)不能铺满地面的讨论可知，x_1 必须是偶数，同理，x_2，x_3 都是偶数.由 $3 \leqslant x_1 \leqslant 5$ 知，$x_1=4$，代入(2)式得

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}, \quad 3 \leqslant x_2 \leqslant x_3.$$

由

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_2},$$

故

$$x_2<8.$$

推出 $x_2=6$，代入$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}$，得 $x_3=12$. 于是 x_1，x_2，x_3 两两不相等的全部解为

(4,6,12)，(4,12,6)，(6,4,12)，

(6,12,4)，(12,6,4)，(12,4,6).

这些解给出的正多边形都能铺满地面，它们对应同一拼法，如图 4.

对于 $k=4, 5, 6$ 的情形，由(1)式分别得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1,$$

满足

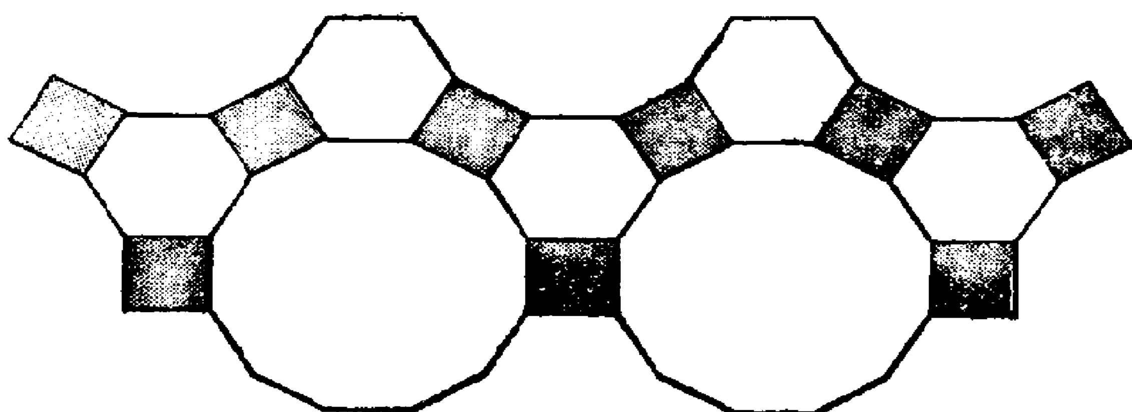


图 4

$$x_j \geqslant 3 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{3}{2},$$

$$x_j \geqslant 3 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (4)$$

和

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} = 2, \\ x_j \geqslant 3 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).\end{array}\right\} \quad (5)$$

对于(5)式,仅有解(3,3,3,3,3,3),其对应拼法图是明显的.

对于(3)式和(4)式,不妨设它们的解分别满足

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$$

和

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5.$$

用前面的方法，容易求得，此时(4)式的解是

(4,4,4,4)，(3,3,6,6)，(3,4,4,6)，(3,3,4,12)；

(5)式的解是

(3,3,3,4,4)，(3,3,3,3,6).

它们对应的拼法图留给读者考虑.

4 把真分数表成单位分数的和

把任何一个真分数表成单位分数的和，如果其中的单位分数允许重复，这显然是办得到的. 例如，设真分数为$\frac{m}{n}$（$n>m>0$），则$\frac{m}{n}$可表成 m 个$\frac{1}{n}$的和：

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

如果其中的单位分数不允许重复，用所谓斐波那契（Fibonacci）演段，也可以证明：任何一个真分数总可以表示成不同的单位分数的和.

设$\frac{1}{x_1}$是不超过$\frac{m}{n}$的最大的单位分数. 如果$\frac{1}{x_1}=\frac{m}{n}$，那么问题已经解决；否则，有$\frac{1}{x_1}<\frac{m}{n}$，于是有

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{mx_1-n}{nx_1}=\frac{m_1}{nx_1},$$

其中 $x_1>0, m_1>0$. 由于$\frac{1}{x_1-1}>\frac{m}{n}$,故 $m_1=mx_1-n<m$. 设$\frac{1}{x_2}$是不超过$\frac{m_1}{nx_1}$的最大的单位分数. 如果$\frac{m_1}{nx_1}=\frac{1}{x_2}$,那么问题也已解决;否则有$\frac{1}{x_2}<\frac{m_1}{nx_1}$,则有

$$\frac{m_1}{nx_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{m_1x_2-nx_1}{nx_1x_2}=\frac{m_2}{nx_1x_2},$$

其中 $x_2>1$, $x_1<x_2$, $m_2>0$. 由于$\frac{1}{x_2-1}>\frac{m_1}{nx_1}$,故 $m_2<m_1<m$. 如此继续下去,可得 $m>m_1>m_2>\cdots>m_k=0$,而且

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}.$$

因为每进行一步,分子至少减小 1,所以 $1\leqslant k\leqslant m$;也就是说,任一个真分数$\frac{m}{n}(0<m<n)$可表成不超过 m 个不同的单位分数的和.

因为

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)},$$

所以,任一个真分数表成不同的单位分数的和,可以有无穷多种表示方法.例如

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806},$$

…………

自然会产生这样的问题,在真分数$\frac{m}{n}$的如此众多的表法中,哪些是我们最感兴趣的呢?或者说,哪些表法可称谓一个好的表法呢?一般地,我们把真分数$\frac{m}{n}$的不同表法中所含单位分数的个数最少的叫$\frac{m}{n}$的**第一类好表法**;把真分数$\frac{m}{n}$的不同表法中所含单位分数的最大分母最小的叫**第二类好表法**.

例如,

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}. \tag{1}$$

由于$\frac{2}{3}$不是单位分数,所以表法(1)是$\frac{2}{3}$的第一

类好表法．同时，我们可以证明表法(1)也是$\frac{2}{3}$的第二类好表法．如果(1)式不是$\frac{2}{3}$的第二类好表法，可设

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k},\ k\geqslant 2,\\ 2\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant 5.\end{gathered}\tag{2}$$

显然，x_k 只能取 3,4,5 三个数．

当 $x_k=3$ 时，由(2)式得

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{k-1}},\ k\geqslant 2,\\ 2\leqslant x_1<\cdots<x_{k-1}<3,\end{gathered}\tag{3}$$

只能有 $k=2$，$x_1=2$，故(3)式不能成立．

当 $x_k=4$ 时，由(2)式得

$$\begin{gathered}\frac{5}{12}=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{k-1}},\ k\geqslant 2,\\ 2\leqslant x_1<\cdots<x_{k-1}<4.\end{gathered}\tag{4}$$

由于$\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$，只能有 $x_{k-1}=3$，由(4)式得出

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{k-2}},\quad k>2,$$

$$2 \leqslant x_1 < \cdots < x_{k-2} < 3. \tag{5}$$

显然,(5)式不能成立.

当 $x_k = 5$ 时,由(2)式得

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{7}{15} = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{k-1}}, \quad k \geqslant 2, \\ 2 \leqslant x_1 < \cdots < x_{k-1} < 5.\end{array}\right. \tag{6}$$

由于$\frac{7}{15} < \frac{1}{2}$,只能有 $x_{k-1} = 4$ 或 3. 当 $x_{k-1} = 4$ 时,由(6)得出

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{13}{60} = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{k-2}}, \quad k > 2, \\ 2 \leqslant x_1 < \cdots < x_{k-2} < 4.\end{array}\right. \tag{7}$$

由于$\frac{13}{60} < \frac{1}{3}$,(7)式不能成立. 当 $x_{k-1} = 3$ 时,由(6)式得出

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2}{15} = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{k-2}}, \quad k > 2, \\ 2 \leqslant x_1 < \cdots < x_{k-2} < 3.\end{array}\right. \tag{8}$$

(8)式显然不能成立. 总之,以上证明了(2)式不能成立,也就是说(1)式是$\frac{2}{3}$的第二类好表法.

对有的真分数，它的第一类好表法就不是第二类好表法．例如，

$$\frac{31}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{60}, \tag{9}$$

很明显，(9)式是$\frac{31}{60}$的第一类好表法．但是，

$$\frac{31}{60}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12},$$

所以(9)式不是$\frac{31}{60}$的第二类好表法．

对于分子和分母都比较大的真分数，求出它们的好表法，往往不是一件容易的事．例如，分数$\frac{5}{121}$，容易证明它不能表示成两个单位分数的和．设

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \tag{10}$$

$(x, y)=d$[①]，$x=dx_1$，$y=dy_1$，$(x_1, y_1)=1$，代入(10)式得

$$\frac{5}{121}=\frac{x+y}{xy}=\frac{x_1+y_1}{dx_1y_1},$$

---

① 记号(x, y)表示整数x、y的最大公因数．$(x, y)=1$时，叫x、y互素．

故

$$5dx_1y_1 = 121(x_1 + y_1). \tag{11}$$

由于$(x_1, y_1)=1$，故$(x_1y_1, x_1+y_1)=1$,不然的话,必有素数 $p\mid(x_1y_1, x_1+y_1)$,即$p\mid x_1y_1$，$p\mid x_1+y_1$. 由 $p\mid x_1y_1$ 知 $p\mid x_1$ 或 $p\mid y_1$，无论哪种情形,再由 $p\mid x_1+y_1$ 都得 $p\mid x_1$，$p\mid y_1$，与$(x_1, y_1)=1$ 矛盾. 于是(11)式给出

$$x_1y_1 \mid 121, \quad 5 \mid x_1 + y_1. \tag{12}$$

而只能有 $x_1y_1=1$,或 $x_1y_1=11$,或 $x_1y_1=121$,无论哪种情形,均不合 $5\mid x_1+y_1$,故(12)式不能成立,即知(10)式不能成立.

由于

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{759} + \frac{1}{208725}, \tag{13}$$

故知(13)式是$\frac{5}{121}$的第一类好表法. $\frac{5}{121}$表成 3 个单位分数之和的方法有 21 种,其中最大分母最小的表法是$\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{121}+\frac{1}{363}$. 因此,(13)式不是$\frac{5}{121}$的第二类好表法.

$\frac{5}{121}$的 21 种表法中,有一种的最大分母比

208725 大：

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{26}+\frac{1}{350}+\frac{1}{275275}.$$

在前面，我们证明了任一个正的真分数可以用无穷多种方法表示成不同的单位分数的和．实际上，这个结论对于任一个正的分数也是对的，现在就来证明这一点．

首先，我们来证明无穷级数的和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{u}+\cdots$$

可以任意大，也就是说，任给一个正数 A，存在一个正整数 u，使得

$$S_u=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u}>A. \qquad (14)$$

由于

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u}+\cdots &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)\\ &+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{999}\right)+\cdots\\ &>\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100}\right)\\ &+\left(\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)+\cdots\end{aligned}$$

$$=\frac{9}{10}+\frac{90}{100}+\frac{900}{1000}+\cdots$$

$$=\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots$$

所以,(14)式成立.

现在,任给一个正的分数$\frac{p}{q}$,存在某个正整数 n,使得

$$S_n \leqslant \frac{p}{q} < S_{n+1},$$

故

$$\frac{p}{q} = S_n + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{n+1}. \qquad (15)$$

如果(15)式中 $\alpha=0$, 则

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

而$\frac{1}{n}$能够用无穷多种方法表示成不同的单位分数的和,而且每一种表法中,单位分数都与 S_{n-1}中每一项不同.如果 $\alpha>0$,此时 α 是一个正的真分数,因而它能够用无穷多种方法表示成不同的单位分数的和,而且每一种表法中的单位分数都与 S_n 中每一项不同.

5 将分数表示为两个单位分数之和的问题

设 $n>1$ 是一个奇数，由斐波那契演段知，$\frac{2}{n}$总能表成两个不同的单位分数的和. 实际上，容易求得

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{b}+\frac{1}{bn}, \quad b=\frac{n+1}{2}. \tag{1}$$

(1)式也是$\frac{2}{n}$的第一类好表法.

然而，不是所有的真分数都能表成两个不同的单位分数的和，甚至，不是所有的真分数都能表成两个单位分数的和. 例如，在上一节里，我们已经证明了$\frac{5}{121}$不能表成两个单位分数的和. 而且，在证明的过程中，细心的读者一定会发现，任一个正分数$\frac{m}{n}$（$m>0$，$n>0$）如果能

表为两个单位分数的和，一定存在正整数 a 和 b 满足

$$a \mid n, \ b \mid n, \ m \mid a+b. \tag{2}$$

现在，我们就来详细证明这个事实. 设

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}, \tag{3}$$

其中 $(x, y) = d$, $(m, n) = e$，则有 $x = dx_1$, $y = dy_1$, $(x_1, y_1) = 1$, $m = em_1$, $n = en_1$, $(m_1, n_1) = 1$，代入(3)式得

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{x_1 + y_1}{dx_1 y_1},$$

故

$$m_1 dx_1 y_1 = n_1(x_1 + y_1). \tag{4}$$

由于 $(x_1, y_1) = 1$，所以 $(x_1 y_1, x_1 + y_1) = 1$. 由(4)式得

$$x_1 y_1 \mid n_1, \ m_1 \mid x_1 + y_1. \tag{5}$$

取 $a = ex_1$, $b = ey_1$，由(5)式得

$$ex_1 y_1 \mid n_1 e = n, \ m = m_1 e \mid ex_1 + ey_1,$$

这就证明了(2)式成立.

反过来，如果(2)式成立，可设 $a + b = mk$,

$n=a\alpha$, $n=b\beta$, 且 k ,α,β 是正整数. 于是,有

$$\frac{km}{n}=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{a\alpha}+\frac{b}{b\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

故

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\alpha k}+\frac{1}{\beta k},$$

总起来,我们得到这样一个结果:分数 $\frac{m}{n}$ ($m>0$, $n>0$)能表成两个单位分数的和的充分必要条件是(2)式成立.

完全类似地可以证明:分数 $\frac{m}{n}$ ($m>0$, $n>0$)能表成两个不同的单位分数的和的充分必要条件是存在不同的正整数 a 和 b 满足 $a\mid n$, $b\mid n$,$m\mid a+b$.

对于 $\frac{3}{n}$, $n>1$, $(3, n)=1$,条件(2)式给出 $a\mid n$, $b\mid n$, $3\mid a+b$, 因为 $3\nmid a$, $3\nmid b$, $3\mid a+b$ 推出 a 或 b 必须是 $3v-1$ 形状. 反过来,n 有一个 $3v-1$ 形状的因子,则取 $a=3v-1$, $b=1$, $3\mid a+b$. 这就是说,设 $n>1$, $(3, n)=1$, $\frac{3}{n}$ 表为两个单位分数的和的充分必要条件是 n 有一个形如 $3v-1$ 形状的因数,因为 $3v-1\neq 1$,这也是 $\frac{3}{n}$ 表为两个不同的单位分数

的和的充分必要条件.

设 n 是奇数, $n>1$, 类似地还可以证明 $\frac{4}{n}$ 表为两个(或不同的两个)单位分数的和的充分必要条件是 n 有一个形如 $4v-1$ 形状的因数.

利用初等数论的知识, 可以证明, 当 n 具有以下形状:

$$n = x^2 + 3y^2, (x, 3y) = 1$$

时, n 的任一个奇因数都是 $6v+1$ 形状.

还可以证明, 当 n 具有以下形状

$$n = x^2 + y^2, (x, y) = 1$$

时, n 的每一个奇因数都是 $4v+1$ 形状.

现在, 我们可以证明有无穷多对分母相差为 6、分子为 3 的分数

$$\frac{3}{4u^2+2u+1}, \frac{3}{4u^2+2u+7},$$

$$(3, u+1) = 1, u = 1, 2, \cdots, \quad (6)$$

都不能表成两个单位分数的和. 这是因为 $4u^2+2u+1=(u+1)^2+3u^2$, $(u+1, 3u)=1$, $4u^2+2u+7=(u-2)^2+3(u+1)^2$, $(u-2, 3(u+1))=1$, 所以 $4u^2+2u+1$ 和 $4u^2+2u+7$ 的每一个因数都是 $6v+1$ 形状, 即知(6)式中的每一个分数都不能表成两个单位分数的

和.

我们还可以证明有无穷多对分母相差为 4 的、分子为 4 的分数

$$\frac{4}{2u^2+2u+1}, \frac{4}{2u^2+2u+5},$$

$$(3, u-1)=1, \quad u=2, 3, \cdots, \qquad (7)$$

都不能表成两个单位分数的和. 这是因为 $2u^2+2u+1=(u+1)^2+u^2$, $(u+1, u)=1$, $2u^2+2u+5=(u-1)^2+(u+2)^2$, $(u-1, u+2)=1$, 所以, $2u^2+2u+1$ 和 $2u^2+2u+5$ 的每一个因数都是 $4v+1$ 形状, 即知(7)式中的每一个数都不能表成两个单位分数的和.

6 将分数表示为三个单位分数之和的一些猜想

设 $n>1$，对于分数$\frac{4}{n}$，由斐波那契演段知，$\frac{4}{n}$一定能表成不超过 4 个的不同的单位分数的和．上一节中，我们已经看到，有无穷多个 n 使$\frac{4}{n}$不能表成两个单位分数的和．很自然，人们会问，是否对于每一个 $n>1$，$\frac{4}{n}$总能表成三个单位分数的和．有人猜想是肯定的．

猜想 A　对于每一个 $n>1$ 的整数，方程

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{1}$$

总有正整数解 x，y，z．

一个更强的猜想是

猜想 B　对于每一个 $n>2$ 的整数，方程

(1)总有$x \neq y$，$y \neq z$，$x \neq z$ 的正整数解.

实际上,在 $n>2$ 时,猜想 A 和猜想 B 是一致的.也就是说,当 $n>2$ 时,如果猜想 A 成立,那么猜想 B 一定成立.现在,我们就来证明这一点.

对于猜想 A 或者猜想 B,如果 $n=p$ 是一个素数时猜想成立,那么 n 等于 p 的任一个倍数 mp 时,猜想也成立.这是因为 $n=p$ 时有解

$$\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

则 $n=mp$ 时有解

$$\frac{4}{mp}=\frac{1}{mx}+\frac{1}{my}+\frac{1}{mz}.$$

由于 $n=4$ 时,

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

$n=3$ 时,

$$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{12},$$

因为大于 2 的整数或者被 4 整除,或者被某一个奇素数 p 整除,因此,只需证明(1)式中 $n=p$ 是大于 3 的奇素数时,猜想 A 成立可推出猜

想 B 成立. 由(1)式得

$$4xyz = p(xy + yz + xz),$$

故 $p \mid xyz$，这就推出 p 整除 x，y，z 中的一个. 但是，不能有 $p \mid x$，$p \mid y$，$p \mid z$. 否则，设 $x = px_1$，$y = py_1$，$z = pz_1$，与 $n = p$ 一并代入(1)式得出

$$4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1},$$

这显然是不可能的. 于是，不失一般性，可设 $p \nmid x$，$p \mid y$，$p \mid z$ 或 $p \nmid x$，$p \nmid y$，$p \mid z$. 对于前一种情形，由于 $x \neq y$，$x \neq z$，可设 $y = z = mp$. 由(1)式得出

$$\frac{4x - p}{x} = \frac{2}{m}.$$

由于 p 是奇数，故有 $2 \mid m$，可设 $m = 2m_1$. 因为 $p > 3$，由 $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{m_1 p}$ 和 $m_1 = 1$ 得出 $3x = p$，故 $m_1 > 1$. 于是，有

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_1 + 1} + \frac{1}{m_1(m_1 + 1)},$$

$$m_1 + 1 \neq m_1(m_1 + 1).$$

因此，

$$\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(m_1+1)p}+\frac{1}{m_1(m_1+1)p},\ p\nmid x.$$

于是,猜想 B 成立.对于后一种情形,由于 $x\neq z$, $y\neq z$,可设 $x=y$, $z=mp$, 与 $n=p$ 一并代入(1)式得出

$$\frac{4}{p}=\frac{2}{x}+\frac{1}{mp},\ p\nmid x. \tag{2}$$

如果(2)式中 $2|x$, 设 $x=2k$, $k>1$,则有

$$\frac{2}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)},\ k+1\neq k(k+1). \tag{3}$$

如果(2)式中 $2\nmid x$,可设 $x=4k+1$,k 是正整数,或 $x=4k+3$, k 是非负整数,则分别有

$$\begin{gathered}\frac{2}{4k+1}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(4k+1)},\\ 2k+1\neq(2k+1)(4k+1),\end{gathered} \tag{4}$$

和

$$\begin{gathered}\frac{2}{4k+3}=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(4k+3)},\\ k+1\neq(k+1)(4k+3).\end{gathered} \tag{5}$$

如果(3)、(4)、(5)式右端的分母中有等于 mp 的情形,则(2)式又变成了前一种情形,仍有猜

想 B 成立. 如果(3)、(4)、(5)式右端的分母中没有等于 mp 的,则猜想 B 也成立.

现在我们来证明 $1<n<10^3$ 时,猜想 A 成立.

设 a, b, c, d 是任意的正整数,如果

$$na+b+c=4abcd, \tag{6}$$

则有

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{bcd}+\frac{1}{nabd}+\frac{1}{nacd}.$$

于是,取 $a=2$, $b=1$, $c=1$,由(6)式得 $n=4d-1$; 取 $a=1$, $b=1$, $c=1$,由(6)式得 $n=4d-2$; 取 $a=b=1$, $c=2$, 由(6)式得 $n=8d-3$; 取 $a=b=1$, $d=1$,由(6)式得 $n=3c-1$. 因为 $n=4$ 时,

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

$n=3$ 时,

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},$$

综上所述,除开 $n\equiv1(\bmod 24)$[①]外,猜想 A 成

---

① 如果 $m>0$, $m\mid a-b$, 记为 $a\equiv b(\bmod m)$,读作 a 和 b 对模 m 同余.

立.

再取 $a=1$，$b=1$，$d=2$，由(6)式可得 $n=7c-1$；取 $a=1$，$b=2$，$d=1$，由(6)式得 $n=7c-2$；取 $a=2$，$b=1$，$d=1$，由(6)式得 $2n=7c-1$，令 $c=2t-1$，则有 $n=7t-4$. 而

$$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28},$$

故知除开 $n\equiv1(\bmod 7)$，$n\equiv2(\bmod 7)$，$n\equiv4(\bmod 7)$外，猜想 A 成立.

又取 $a=1$，$b=2$，$d=2$，由(6)式可得 $n=15c-2$；取 $a=2$，$b=1$，$d=2$，由(6)式可得 $2n=15c-1$. 令 $c=2t-1$，则有 $n=15t-8$. 而

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10},$$

故知除开

$$n\equiv1,2,3,4,6,8,9,11,12,14(\bmod 15)$$

外，猜想 A 成立. 由前面的讨论知，$n\equiv2(\bmod 3)$，$n\equiv0(\bmod 3)$时，猜想 A 成立，进一步可知除开 $n\equiv1(\bmod 5)$，$n\equiv4(\bmod 5)$外，猜想 A 成立. 总起来，我们证明了除开

$$n\equiv1(\bmod 24)$$

或

$n \equiv 1 \pmod 7$, $n \equiv 2 \pmod 7$, $n \equiv 4 \pmod 7$

或

$$n \equiv 1 \pmod 5, \quad n \equiv 4 \pmod 5$$

外,猜想 A 成立.

于是,除开以下六种情况

$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 1 \pmod 7$, $n \equiv 1 \pmod 5$,
$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 1 \pmod 7$, $n \equiv 4 \pmod 5$,
$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 2 \pmod 7$, $n \equiv 1 \pmod 5$,
$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 2 \pmod 7$, $n \equiv 4 \pmod 5$,
$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 4 \pmod 7$, $n \equiv 1 \pmod 5$,
$n \equiv 1 \pmod{24}$, $n \equiv 4 \pmod 7$, $n \equiv 4 \pmod 5$

以外,猜想 A 成立.

因为$(24,7)=(5,7)=(24,5)=1$,用著名的孙子定理①,由以上六种情形得

$$n \equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \pmod{840}, \tag{7}$$

---

① 设 $m_1, \cdots, m_k$ 是 k 个两两互素的正整数, $m = m_1 \cdots m_k$, $m = m_i M_i$, $i = 1, \cdots, k$, 则同余式组

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \cdots, x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

的解是

$$x \equiv M'_1 M_1 b_1 + \cdots + M'_k M_k b_k \pmod m,$$

其中 $M'_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, \cdots, k$.

即除开(7)式中的 n 以外,猜想A成立.

上面已经说过,要证明猜想A对于整数 $1<n<10^3$ 成立,只需证明 n 是素数的情形就行了.

因为 $1<n<10^3$ 时,(7)式中的数给出

$$121,169,289,361,529,841,961,$$

它们都是复合数,这就告诉我们对于 $1<n<10^3$ 的所有素数 n 猜想A成立,这也就证明了对于 $1<n<10^3$ 的所有整数 n,猜想A成立.

对于 $1<n<10^7$ 的所有整数 n,已经证明猜想A是成立的,但是,这个猜想的证明问题仍未解决.

下面类似的猜想的证明问题也还没有解决.

猜想C 对于每一个 $n>1$ 的整数,方程

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

总有正整数解 x, y, z.

7 从完全数谈起

早在欧几里得时代,人们已经发现某些正整数具有奇妙的性质,例如

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

等等,这样的数叫完全数.

一般地,一个正整数 n,如果它的除开本身以外的全部因数(通常总是指正的)的和等于 n,这样的 n 叫**完全数**.如果用 $\sigma(n)$表示 n 的所有的因数的和,则满足

$$\sigma(n) = 2n$$

的 n 叫完全数.

欧几里得关于素数无限的定理,就是由研究完全数得到的.

形如 $M_n = 2^n - 1$ 的数叫梅森(Mersenne)

数.我们知道[1]:

如果 M_p 是素数(易知 M_n 是素数,n 一定是一个素数,故设为 p),那么

$$\frac{1}{2}M_p(M_p+1)=2^{p-1}(2^p-1)$$

是一个偶完全数,而且除开这种偶完全数以外,无其他的偶完全数.

是否有无限多个偶完全数?以及是否存在奇完全数的问题,是数学中一个非常古老的尚未解决的问题.

完全数和单位分数也有着密切联系.

设 N 的除开本身以外的全部因数是

$$1,\ d_1,\ d_2,\ \cdots,d_n,$$

$$1<d_1<d_2<\cdots<d_n<N.$$

如果 N 是完全数,则有

$$N=1+d_1+d_2+\cdots+d_n, \qquad (1)$$

因为

$$\frac{N}{d_n}=d_1,\ \frac{N}{d_{n-1}}=d_2,\ \cdots,\ \frac{N}{d_1}=d_n,$$

由(1)式得

① 华罗庚:《数论导引》,科学出版社,1957 年.

$$1=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}+\frac{1}{N}. \tag{2}$$

于是,存在一个完全数,就得出一个把 1 表为不同的单位分数之和的表示式.反之,如果(2)式成立,且 $d_1,\cdots,d_n$ 恰为 N 的除开 1 和 N 以外的全部因数,则 N 是一个完全数.

设 N 是一个偶完全数,则有

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{M_p}+\frac{1}{2M_p}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}M_p},$$

即

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496},$$

....

这也说明,把 1 表示成为不同的单位分数的和的问题,包含了一些很困难的问题.

8 关于单位分数表示 1

我们首先研究，1 能否表成这样 $s+1$ 个单位分数的和，使得其中一个是另外 s 个单位分数的积，就是说，方程

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_1\cdots x_s}=1 \tag{1}$$

有无正整数解 $x_1,\cdots,x_s$.

由(1)式得

$$x_2\cdots x_s+\cdots+x_1\cdots x_{s-1}+1=x_1\cdots x_s. \tag{2}$$

设$(x_i, x_j)=d$, $1\leqslant i<j\leqslant s$, 由(2)式得 $d\mid 1$, 故 $d=1$. 又由(1)式得 $x_j\neq 1(j=1, \cdots, s)$, 因此，$x_i\neq x_j$, $1\leqslant i<j\leqslant s$, 故(1)式的正整数解可以设为$(x_1,\cdots,x_s)$, $1<x_1<x_2<\cdots<x_{s-1}<x_s$.

现在，来证明：

1) 如果$(u_1,\cdots,u_t)$, $t\geqslant 1$,是(1)式在 $s=t$ 时的一组解,则$(u_1,\cdots,u_t,\ u_1\cdots u_t+1)$是(1)式在 $s=t+1$ 时的一组解.这只需代入验证一下就行了.

由

$$\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_t}+\frac{1}{u_1\cdots u_t+1}$$

$$+\frac{1}{u_1\cdots u_t(u_1\cdots u_t+1)}$$

$$=\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_t}+\frac{1}{u_1\cdots u_t}=1.$$

2) 设 $\Omega(s)$表示(1)式的解$(x_1,\cdots,x_s)(1<x_1<\cdots<x_{s-1}<x_s)$的个数,我们有:

如果 $v_1,\cdots,v_{s-1}$ 满足 $\frac{1}{v_1}+\cdots+\frac{1}{v_{s-1}}+\frac{1}{v_1\cdots v_{s-1}}=1$,且$(v_1\cdots v_{s-1})^2+1$ 是复合数,则有 $\Omega(s)<\Omega(s+1)$.

在方程

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{s-1}}+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}+\frac{1}{x_1\cdots x_{s-1}x_sx_{s+1}}=1$$

中,令 $x_i=v_i(i=1,\ \cdots,s-1)$,则得

$$\frac{1}{v_1}+\cdots+\frac{1}{v_{s-1}}+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}+\frac{1}{v_1\cdots v_{s-1}x_sx_{s+1}}=1,$$

即

$$\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}+\frac{1}{v_1\cdots v_{s-1}x_sx_{s+1}}=\frac{1}{v_1\cdots v_{s-1}},$$

$$(x_s-v_1\cdots v_{s-1})(x_{s+1}-v_1\cdots v_{s-1})$$
$$=(v_1\cdots v_{s-1})^2+1. \tag{3}$$

因为$(v_1\cdots v_{s-1})^2+1$是复合数，可设$(v_1\cdots v_{s-1})^2+1=ab$，$1<a<b<(v_1\cdots v_{s-1})^2+1$，由(3)得

$$x_s=v_1\cdots v_{s-1}+a,\ x_{s+1}=v_1\cdots v_{s-1}+b,$$

或

$$x_s=v_1\cdots v_{s-1}+1,\ x_{s+1}$$
$$=v_1\cdots v_{s-1}[(v_1\cdots v_{s-1})+1]+1.$$

这就证明了$\Omega(s)<\Omega(s+1)$.

3) 已知(1)在$1\leqslant s\leqslant 6$的全部解为

$\Omega(1)=1$, (2).

$\Omega(2)=1$, (2, 3).

$\Omega(3)=1$, (2, 3, 7).

$\Omega(4)=1$, (2, 3, 7, 43).

$\Omega(5)=3$, (2, 3, 11, 23, 31), (2, 3, 7,

43, 1807), (2, 3, 7, 47, 395).

$\Omega(6)=8$, (2,3,11,23,31,47059),

(2,3,7,43,1823,193667),

(2,3,7,47,403,19403),

(2,3,7,47,583,1223),

(2,3,7,43,1807,3263443),

(2,3,7,47,415,8111),

(2,3,7,47,395,779731),

(2,3,7,55,179,24323).

4）现在,我们用数学归纳法来证明 $n\geqslant 3$ 时,有 $\Omega(2n+1)<\Omega(2n+2)$. 因为(2,3,11,23,31,47059)是(1)式在 $s=6$ 时的一组解,设 $B=2\cdot 3\cdot 11\cdot 23\cdot 31\cdot 47059$,故 $B\equiv 2\pmod 5$, $B^2+1\equiv 0\pmod 5$,由性质 2)知 $\Omega(7)<\Omega(8)$. 设

$$\eta_0=B,\ \eta_1=\eta_0+1,\ \eta_2=\eta_0\eta_1+1,\cdots,$$

$$\eta_n=\eta_0\cdots\eta_{n-1}+1, \qquad (4)$$

由性质 1)知

$$(2,3,11,23,31,47059,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{2k-6})$$

是(1)式在 $s=2k$，$k>3$ 时的一组解. 现在假定[①]

$$\prod_{i=0}^{2k-6}\eta_i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 5),\qquad (5)$$

故

$$\left(\prod_{i=0}^{2k-6}\eta_i\right)^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 5),$$

于是有

$$\Omega(2k+1)<\Omega(2k+2).$$

现在来证明，当 $n=k+1$ 时，也有

$$\Omega(2k+3)<\Omega(2k+4).\qquad (6)$$

由性质 1)和(4)式知

$$(2,3,11,23,31,47059,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{2k-4})$$

是(1)式在 $s=2k+2$ 时的一组解，且由(5)式知

$$\prod_{i=0}^{2k-4}\eta_i\equiv 2\eta_{2k-5}\eta_{2k-4}$$

---

① 记号 $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$.

$$\equiv 2\left(\prod_{i=0}^{2k-6}\eta_i+1\right)\left(\prod_{i=0}^{2k-6}\eta_i\left(\prod_{i=0}^{2k-6}\eta_i+1\right)+1\right)$$

$$\equiv 2\cdot 3(2\cdot 3+1)\equiv 2 \pmod 5,$$

即有

$$\left(\prod_{i=0}^{2k-4}\eta_i\right)^2+1\equiv 0 \pmod 5,$$

故由性质 2)推出(6)式成立,这就证明了在 $n\geqslant 3$ 时,有

$$\Omega(2n+1)<\Omega(2n+2).$$

现在,再来证明 $n\geqslant 2$ 时,$\Omega(2n)<\Omega(2n+1)$. 因为(2,3,7)是(1)式在 $s=3$ 时的一组解,而 $2\cdot 3\cdot 7\equiv 2 \pmod 5$,由性质 2)便知 $\Omega(4)<\Omega(5)$,以下仍用归纳法,可类似前面方法证明.

总起来,我们证明了

$$n\geqslant 3,\ \Omega(2n)<\Omega(2n+1)<\Omega(2n+2). \tag{7}$$

因为 $\Omega(4)=1$, $\Omega(5)=3$, $\Omega(6)=8$, 再由(7)式便证明了 $s\geqslant 4$ 时,$\Omega(s)<\Omega(s+1)$.

5)设

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1,$$

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n. \qquad (8)$$

对于(8)式的所有的解$(x_1, \cdots, x_n)$中，x_n 的最大值设为y_n，可以证明

$$y_3 = 6,\ y_4 = 42,\ y_5 = 1806,\ \cdots,$$

$$y_{n+1} = y_n(y_n + 1),\ n \geqslant 3,$$

即有

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = 1,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1086} = 1,$$

....

它们都包含在(1)式的解中.

然而，x_n 的极小值是多少？这个问题至今尚未解决.

对于(8)式的解$(x_1, \cdots, x_n)$的个数，还未找到一个近似的值，就是(1)式的解的个数$\Omega(s)$，也未找到它的近似值.

如果限定(8)式中的 $x_i\ (i = 1, \cdots, n)$都是奇数，不算$\frac{1}{1}$，那么此时 n 的最小值是多少？这

个问题近年来才解决.最小值是 9,共有五组解,它们是:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}.$$

如果限定(8)式中的 $x_i(i=1,\cdots,n)$都是奇数,不算$\frac{1}{1}$,其最大分母的最小值是 105,其表示式为

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{77}+\frac{1}{105}.$$

6) 如果限定方程(1)中的 $x_i(i=1,\cdots,n)$都是素数,目前知道 $1\leqslant s\leqslant 8$ 时,都有一组解:

$$s=1,\ x_1=2;$$

$$s=2,\ (2,\ 3);$$

$$s=3,\ (2,\ 3,\ 7);$$

$$s=4,\ (2,\ 3,\ 7,\ 43);$$

$$s=5,\ (2,\ 3,\ 11,\ 23,\ 31);$$

$$s=6,\ (2,\ 3,\ 11,\ 23,\ 31,\ 47059);$$

$$s=7,\ (2,\ 3,\ 11,\ 17,\ 101,\ 149,\ 3109);$$

$$s=8,\ (2,\ 3,\ 11,\ 23,\ 31,\ 47059,\ 2217342227,\ 1729101023519).$$

$s>8$ 时,还不知道方程(1)是否有都是素数的解.

9 不表示整数的某些单位分数的和

很早,我们就知道了

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\quad(n>1)$$

不可能是一个整数.

更一般地,单位分数的和

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n},\ n\geqslant 1\quad(1)$$

决不能是一个整数.现在,我们就来证明这个结论.

设

$$m+j=2^{l_j}u_j,u_j\text{ 是奇数},l_j\geqslant 0$$
$$(j=0,1,\cdots,n).$$

再设

$$l_0,\ l_1,\cdots,l_n \tag{2}$$

中最大的是 $l_k = l(0\leqslant k\leqslant n)$,而(2)式中除 $l_k = l$ 外,再没有数等于 l 了.不然的话,不失一般性,可设 $l_k = l_t = l(0\leqslant k < t\leqslant n)$,于是有

$$m + k = 2^l u_k < m + t = 2^l u_t.$$

因为 u_k, u_t 都是奇数,所以有

$$u_k < u_k + 1 < u_t,$$

即有

$$m + k = 2^l u_k < 2^l(u_k + 1) < m + t = 2^l u_t.$$

而(1)式中的分母组成连续的整数,便有

$$m + f = 2^l(u_k + 1) = 2^{l_f} u_f,\ k < f < t.$$

由于 $u_k + 1$ 是偶数,可知 $l_f > l$,这和 l 最大矛盾.

如果(1)式中的和是整数,设为 S,即

$$S = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+n}.$$

令 $u = \prod_{j=0}^{n} u_j$,则有

$$2^{l-1} uS = M + \frac{1}{2},$$

其中 M 是整数.这显然是不可能的.这就证明了(1)式决不能是一个整数.

更一般地,分母成等差级数的单位分数的和

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}+\frac{1}{m+2d}+\cdots$$

$$+\frac{1}{m+nd},\ n>0,\ d>0,$$

决不是一个整数.

设

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\quad(0<x_1<x_2<\cdots<x_n)$$

是一个整数,则由(1)式中的和不是一个整数知

$$x_2-x_1,\ x_3-x_2,\cdots,x_n-x_{n-1}$$

中最大的数 d 满足

$$d\geqslant 2.$$

是否有 $d\geqslant 3$? 这是一个尚未解决的问题.

10 一个有趣的级数

在第四节中，我们已经证明了无穷级数的和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{u}+\cdots \tag{1}$$

可以任意大.

还有，以全部素数的倒数所组成的无穷级数的和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{p}+\cdots$$

可以任意大. 也就是说，任给一个正数 A，存在一个素数 p，使得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}>A.$$

现在，我们去掉(1)式中含数字 9 的所有

项，得到无穷级数的和

$$S=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{88}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{108}+\frac{1}{110}+\cdots \tag{2}$$

非常有趣的是(2)式中的无穷级数的和 S 小于 90. 现在，我们就来证明这一结论. 把(2)式写成

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{88}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{888}\right)+\cdots$$

我们把第一个括号中的和记为 a_1，第二个括号中的和记为 a_2，……，第 n 个括号中的和记为 a_n，因而以上级数的和可记为

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

$\frac{1}{10^{n-1}}$是 a_n 中第一个也是 a_n 中最大的分数. 现在，我们用归纳法来证明 a_n 中的项数小于 9^n. 当 $n=1$ 时，a_1 中有 8 项，$n=2$ 时，a_2 中有 72 项. 设 a_k 中的项数小于 9^k，我们来计算 a_{k+1} 中的项数，即

$$\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 10^k}+\cdots+\frac{1}{3\cdot 10^k}+\cdots$$
$$+\frac{1}{8\cdot 10^k}+\cdots+\frac{1}{8\left(\frac{10^{k+1}-1}{9}\right)} \qquad (3)$$

中的项数.如果在

$$a_1+a_2+\cdots+a_k$$

中不含单位分数

$$\frac{1}{xy\cdots z},$$

(请读者注意,这里 $xy\cdots z$ 表示 k 个数字,如果它不是 k 位数,则在前面加 0,使它仍构成 k 个数字.)则在(3)式中的部分和 $\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 10^k}$ 中不含

$$\frac{1}{1xy\cdots z}.$$

反过来也是一样.因此 $a_1+\cdots+a_k$ 的项数加 1 等于 $\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 10^k}$ 的项数.同理可证 $a_1+\cdots+a_k$ 的项数也分别等于 $\frac{1}{2.10^k}+\cdots$;$\frac{1}{3\cdot 10^k}+\cdots$;$\cdots$;$\frac{1}{8\cdot 10^k}+\cdots+\frac{1}{8\left(\frac{10^{k+1}-1}{9}\right)}$ 的项数.设(3)

式的项数为 T,由归纳法假设 $a_1+\cdots+a_k$ 的项数小于 $9+9^2+\cdots+9^k$,故

$$T<8(9+9^2+\cdots+9^k)=8\cdot\frac{9(9^k-1)}{9-1}$$

$$=9^{k+1}-9<9^{k+1}.$$

这就证明了 a_n 中的项数小于 9^n.于是

$$S<\frac{9}{10^0}+\frac{9^2}{10^1}+\frac{9^3}{10^2}+\cdots+\frac{9^n}{10^{n-1}}+\cdots$$

$$=\frac{9}{1-\frac{9}{10}}=90.$$

用同样的方法可以证明,去掉(1)式中含数字 1 或数字 2,……,或数字 8 的所有项,得到的无穷级数的和小于一个正常数.

11 莱布尼茨单位分数三角形

我们知道，设 $n>0$，

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

其中

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r},$$

$$0 < r \leqslant n,$$

叫二项系数，它们满足关系式

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}. \qquad (1)$$

还可将二项系数排成一个三角形

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

(2)

其中$\binom{0}{0}$定义为1，第$n+1(n\geqslant 1)$行是$(1+x)^n$的全部二项系数按次序$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，$\binom{n}{2}$，$\binom{n}{3}$，…，$\binom{n}{n}$排列，这个三角形的两个斜边都由1组成，相邻两行形如

$$\begin{matrix}\binom{n}{r-1} & & \binom{n}{r} \\ & \binom{n+1}{r} & \end{matrix}$$

的数，满足公式(1).

(2)式就是熟知的杨辉三角形.

现在，我们把杨辉三角形中每一个$\binom{n}{r}$换成$\dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}$，就得到一个由单位分数组成的三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

其中三角形的两个边由 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots$ 组成，相邻两行的数满足关系式

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\quad \frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20},\ \frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30},\cdots.$$

一般地,满足

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r-1}}+\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}$$

$$=\frac{\binom{n+1}{r}}{(n+1)\binom{n}{r}\binom{n}{r-1}}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

$$\cdot\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}\cdot\frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$=\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}=\frac{1}{n\binom{n-1}{r-1}}.$$

这个三角形叫莱布尼茨(Leibniz)三角形,利用它可以计算出某些由单位分数组成的无穷级数的和.

设三角形的左边叫第一条“路”,紧靠第一条“路”并与它平行的叫第二条“路”,……,依

次类推.于是第二条“路”上的诸单位分数的和为1,即 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$ 第三条“路”上的诸单位分数的和为$\frac{1}{2}$,即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$ 第四条“路”上的诸单位分数的和为$\frac{1}{3}$,即 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\cdots$